Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen und ihre Approximation

Mathematische Herleitung und weiterführende Erklärungen

Manuel Bürki und Stepan Khristolyubov

Dieses Skript ist eine Ergänzung zu dem Poster *Gekoppelte Differentialgleichungen*. Das Skript, Poster und eine interaktive Simulation finden sich unter simplemath.ch oder unter dem links abgebildeten QR Code.

1 Einleitung

1.1 Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, welche einen mathematischen Zusammenhang beschreibt, der zwischen einer unbekannten Funktion $y = y(x)$, deren ersten oder höheren Ableitungen $y', y'', ...$ (auch geschrieben als $\dot{y}, \ddot{y}, ...$) sowie der Funktionsvariable x besteht. [1]

1.2 Praktisches Beispiel

Zur Veranschaulichung des Prinzips verwenden wir ein praktisches Beispiel aus der Physik - das Federpendel. Die Theorie für die physikalischen Zusammenhänge haben wir aus LEIFIphysik übernommen.

1.2.1 Das Federpendel

Ein **Federpendel** besteht aus einem **Pendelkörper** der Masse m, der an einer horizontal beweglichen Feder mit der Federkonstante D befestigt ist. Es wirkt zudem keine Gewichtskraft auf das Federpendel, in der Praxis kann diese z.B. durch eine Luftkissenbahn kompensiert werden.

Der Pendelkörper der Federpendels wird nun ein Stück aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, festgehalten und anschliessend aus der Ruhe losgelassen. Abbildung xyz ist eine schematische Abbildung eines solchen Federpendels, welches sich in der Gleichgewichtslage befindet.

1.2.1.1 Arithmetische Lösung der Bewegung

Wenn der Pendelkörper auf die Position x ausgelenkt wird, dann gilt für die rücktreibende Kraft F_F folgendes [2]:

$$F_F = -D \cdot x \tag{1.1}$$

Die rücktreibende Kraft F_F ist somit entgegengesetzt gerichtet und betraglich proportional zur Auslenkung x. Das Federpendel schwingt somit harmonisch. Wenn das Koordinatensystem geeignet gewählt wird, so dass für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ gilt, dann werden die Position x, die Geschwindigkeit v, die Beschleunigung a und die Energie E des Federpendels durch die folgenden Funktionen in Abhängigkeit der Zeit t beschrieben.

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ mit } \hat{x} = x_0, \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \\ v(t) &= -\hat{v} \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ mit } \hat{v} = x_0 \cdot \omega = x_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \\ a(t) &= -\hat{a} \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ mit } \hat{a} = x_0 \cdot \omega^2 = x_0 \cdot \frac{D}{m} \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$E(t) = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \Longrightarrow E = \frac{D \cdot x_0^2}{2}$$

Diese Funktion können wir später verwenden um die Approximationen der verschiedenen Näherungsverfahren auf ihre Genauigkeit zu prüfen.

1.2.1.2 Approximative Lsöung der Bewegung

Im Folgenden wollen wir die Bewegung des Federpendels mathematisch herleiten. Dazu machen, wir wie oben genannt die folgenden Annahmen zur Vereinfachung der Fragestellung:

- Die Bewegung des Pendelkörpers und der Feder verläuft reibungsfrei.
- Die Masse der Feder wird vernachlässigt.
- Der Betrag der Federkraft ist proportional zur Ausdehnung der Feder.

1. **Einführung eines geeigneten Koordinatensystems**:

Durch die Wahl eines geeigneten (eindimensionalen) Koordinatensystems (x-Achse), dessen Nullpunkt in der Ruhelage des Federpendels liegt und das nach rechts orientiert ist, gilt in diesem Koordinatensystem für die Beschleunigung als zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit

$$a = \ddot{x}(t) \tag{1.3}$$

2. **Bestimmung der beschleunigenden Kraft und Masse**

Die Bewegung verläuft gemäss unseren Annahmen reibungsfrei, wodurch auf das Federpendel nur eine Kraft wirkt: Die Federkraft $\vec{F}_F$ Somit erhalten wir

$$F_{\text{res}} = F_F \tag{1.4}$$

Für die beschleunigte Masse vernachlässigen wir die Masse der Feder somit ist die beschleunigte Masse m gleich der Masse des Pendelkörpers.

3. **Konkretisieren der Bewegungsgleichung**

Somit ergibt sich aus Gleichung (1.3) und Gleichung (1.4) mithilfe der Umformung des zweiten Newtonschen Axioms $F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_F}{m} \tag{1.5}$$

Wir wissen bereits, dass die Federkraft $\vec{F}_F$ stets gegen die Position x gerichtet ist. Wenn die Position x positiv ist, wirkt die Federkraft somit gegen die Orientierung des Koordinatensystems; ist die Position x dagegen negativ, so wirkt die Federkraft mit der Orientierung des Koordinatensystems. Es gilt also $F_F = -D \cdot x$, da diese Beziehung zu jedem Zeitpunkt t gilt lässt sich x allgemeiner als $x(t)$ schreiben. Damit erhalten wir

$$F_F = -D \cdot x(t) \tag{1.6}$$

Setzen wir jetzt Gleichung (1.6) in Gleichung (1.5) ein, so erhalten wir

$$\ddot{x} = \frac{F_F}{m} = \frac{-D \cdot x(t)}{m} = -\frac{D}{m} \cdot x(t) \tag{1.7}$$

Durch Äquivalenzumformungen lassen sich alle Terme auf die linke Seite der Gleichung bringen, somit ergibt sich

$$\ddot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0 \tag{1.8}$$

Gleichung (1.7) ist eine Differentialgleichung, welche die Beschleunigung a als zweite Ableitung der Position $\ddot{x}$ enthält und das Federpendel beschreibt. Diese kann arithmetisch exakt gelöst werden oder kann mithilfe von verschiedenen Verfahren approximiert werden.

2 Approximationen

Kennen wir eine Differentialgleichung von der Form $\dot{x}(t) = f(t, x)$, welche einen Zusammenhang zwischen der Ableitung $\dot{x}(t)$, der Funktion $x = x(t)$ sowie der Funktionsvariablen t beschreibt, und deren Startwert $x(t_0) = x_0$, so können wir Lösung dieser Gleichung numerisch approximieren. Unsere Funktion (Gleichung (2.7)) beschreibt jedoch einen Zusammenhang zwischen der zweiten Ableitung $\ddot{x}(t)$ und der Funktion $x(t)$, weshalb diese nicht direkt mit den uns bekannten Näherungsverfahren approximiert werden kann. Es ist jedoch möglich diese Funktion umzuschreiben und in ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen umzuwandeln, welche anschliessend gemeinsam approximiert werden können.

2.1 Umwandlung in gekoppelte Differentialgleichungen

Im Folgenden wollen wir unsere Funktion

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t) \tag{2.1}$$

in ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen umwandeln. Dazu definieren wir eine neue Variable v und setzten sie gleich der ersten Ableitung der Position nach der Zeit $v(t) = \dot{x}(t)$. Schreiben wir nun die zweite Gleichung mit $\dot{v}(t)$ anstelle von $\ddot{x}(t)$ erhalten wir das folgende System der beiden gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) &= -\frac{D}{m} \cdot x(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Diese Gleichungen können wir nun schritt für Schritt mit verschiedenen Näherungsverfahren approximieren.

2.2 Näherungsverfahren

Es gibt unterschiedliche Näherungsverfhahren, welche jedoch abstrahiert alle dasselbe machen. Da wir den Startwert x_0 zum Zeitpunkt t_0 gegeben haben und wir durch die Ableitung wissen, wie sich die Funktion an einem bestimmten Punkt $x_i = x(t_i)$ verändert können wir dieses Wissen nutzen um abzuschätzen welchen Wert die Funktion haben wird wenn wir einen Zeitschritt h (manchmal auch Δt) nach vorne gehen.

Im folgenden werden wir uns ansehen, wie die Verfahren funktionieren und wie genau sie das System der beiden Differentialgleichungen unseres Federpendels approximieren. Für die Approximation wählen wir die Parameter D und m, die Anfangsbedingungen x_0 und v_0, die Schrittweite h sowie die Anzahl der Schritte N:
$D = 1\ \mathrm{Nm^{-1}}, m = 1\mathrm{kg}, x_0 = 1\mathrm{m}, v_0 = 0\ \mathrm{ms^{-1}}, a_0 = -1\ \mathrm{ms^{-2}}, h = 0.5\mathrm{s}, \mathrm{N} = 40$

2.2.1 Euler-Verfahren

Das einfachste Verfahren ist das Euler-Verfahren, welches die Funktion wir folgt approximiert:

1. Mithilfe von D, m und x_0 wird die Beschleunigung zum Zeitpunkt t_0 berechnet es gilt: $a_0 = a(x_0) = -\frac{D}{m} \cdot x_0 = -1\text{ms}^{-2}$
2. Die Position wird aktualisiert für den ersten Schritt gilt die neue Position $x_1 = x_0 + h \cdot v_0$. Die neue Position x_1 ist somit das Resultat der Summe von der Ursprungsposition x_0 und der Strecke, welche zurückgelegt wird, wenn man sich mit der Geschwindigkeit v_0 während des Zeitraums h bewegt.
3. Die Geschwindigkeit wird gleich wie die Position aktualisiert mit dem Unterschied, dass hier die Änderungsrate die Beschleunigung a_i ist. Auch hier ist die neue Geschwindigkeit v_1 die Summe der vorherigen Geschwindigkeit v_0 und der zeitliche Änderungsrate (Ableitung) der Geschwindigkeit a_0 im Zeitraum h: $v_1 = v_0 + h \cdot a_0$
4. Die Beschleunigung wird mithilfe der Position neu berechnet. Die Beschleunigung an der Position x ist durch den Zusammenhang $a = -\frac{D}{m} \cdot x$ gegeben, deshalb gilt:

$$a_1 = a(x_1) = -\frac{D}{m} \cdot x_1 \tag{2.3}$$

Allgemein lautet die mathematische Schreibweise für das Euler-Verfahrens zur Approximation unseres Federpendels wie folgt [3]:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot v_i \\ v_{i+1} &= v_i + h \cdot a_i \\ a_{i+1} &= a(x_{i+1}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2.2 Euler-Cromer-Verfahren

Das Euler-Cromer Verfahren funktioniert ähnlich wie das Euler-Verfahren. Zuerst wird jedoch die Beschleunigung an der Position x_0 berechnet und mit dieser Beschleunigung die Geschwindigkeit v_1. Die Position wird dann mit der neuen Geschwindigkeit approximiert und nicht, wie beim Euler-Verfahren, mit der aktuellen Geschwindigkeit. Die Notation für das Euler-Cromer-Verfahren lautet [4]:

$$\begin{aligned} a_i &= a(x_i) = -\frac{D}{m} \cdot x_i \\ v_{i+1} &= v_i + h \cdot a_i \\ x_{i+1} &= x_i + h \cdot v_{i+1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2.3 Heun-Verfahren

Das Heun Verfahren berechnet zuerst einen vorläufingen Schritt, welcher gleich wie das Euler-Verfahren berechnet wird. Anschliessend werden diese Werte verwendet um die Änderungsraten am Anfang und am Ende des vorhergesagten Schritts zu mitteln. Die mathematische Notation für das Heun-Verfahren lautet wie folgt, wobei $\tilde{x}, \tilde{v}$ und $\tilde{a}$ die Werte am Ende des vorhergesagten Schrittes darstellen und x, v und a die Werte sind, welche mithilfe des Durchschnittes von $\tilde{v}_{i+1}$ und v_i respektive $\tilde{a}_{i+1}$ und a_i berechnet wurden [5].

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1} = x_i + hv_i,\ \tilde{v}_{i+1} = v_i + ha_i,\ \tilde{a}_{i+1} = -\frac{D}{m}\tilde{x}_{i+1} \\ x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} \cdot (v_i + \tilde{v}_{i+1}) \\ v_{i+1} = v_i + \frac{h}{2} \cdot (a_i + \tilde{a}_{i+1}) \\ a_{i+1} = -\frac{D}{m} \cdot x_{i+1} \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.4 Leapfrog-Vefahren

Das Leapfrog-Verfahren ist ähnlich wie das Euler-Cromer verfahren doch die Position und Geschwindigkeit, werden zu verschiedenen Zeitpunkten approximiert. Das Bedeutet, dass die Position zu Beginn eines Schrittes berechnet wird (also bei h, $2h$, $3h$, etc.) während die Geschwindigkeit in der Mitte eines Zeitschrittes berechnet wird (sprich bei $\frac{h}{2}$, $3\frac{h}{2}$, $5\frac{h}{2}$, etc.). Für die Approximation der Position x_i wird dabei die Geschwindigkeit verwendet, welche einen halben Zeitschritt nach der Position liegt, also $v_{i+\frac{1}{2}}$. Da die Geschwindigkeit damit versetzte Indizes aufweist muss zuerst mithilfe der Beschleunigung $v_{-\frac{1}{2}}$ berechnet werden [6].

$$\begin{aligned} v_{-\frac{1}{2}} = v_0 - \frac{h}{2} \cdot a_0 \\ v_{i+\frac{1}{2}} = v_{i-\frac{1}{2}} + a_i \cdot h \\ x_{i+1} = x_i + v_{i+\frac{1}{2}} \cdot h \\ a_{i+1} = a(x_{i+1}) = -\frac{D}{m} \cdot x_{i+1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2.5 Runge-Kutte-Verfahren

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren (auch: Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung) verwendet einen ähnlichen Ansatz wie das Heun-Verfahren, nutzt jedoch für jeden Schritt vier Näherungen, welche gewichtet gemittelt werten. Die mathematische Notation des Runge-Kutta-Verfahrens lautet [7]:

$$
\begin{aligned}
t_{i+1} &= t_i + h \\
x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6}(k_1^x + 2k_2^x + 2k_3^x + k_4^x) \\
v_{i+1} &= v_i + \frac{h}{6}(k_1^v + 2k_2^v + 2k_3^v + k_4^v) \\
&\text{für i} = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \text{mit} \\
k_1^x = v_i,\ k_2^x &= v_i + \frac{h}{2} \cdot k_1^v,\ k_3^x = v_i + \frac{h}{2} \cdot k_2^v,\ k_4^x = v_i + h \cdot k_3^v \\
k_1^v = a(x_i),\ k_2^v &= a\left(x_i + \frac{h}{2}k_1^x\right),\ k_3^v = a\left(x_i + \frac{h}{2}k_2^x\right),\ k_4^v = a(x_i + h \cdot k_3^x)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

3 Resultate

Mithilfe der festgelegten Startwerte (siehe Abschnitt 2.2) können wir diese Gleichungen mit einem Programm approximieren. Dazu haben wir Rust Programme verwendet, welche uns die approximierten Werte für die jeweiligen Zeitpunkte t_i geben, sowie die interaktiven Simulationen auf simplemath.ch [*Hinweise: diese Simulationen wurden mithilfe von KI (Codex) erstellt; die Werte wurden von uns verifiziert*].

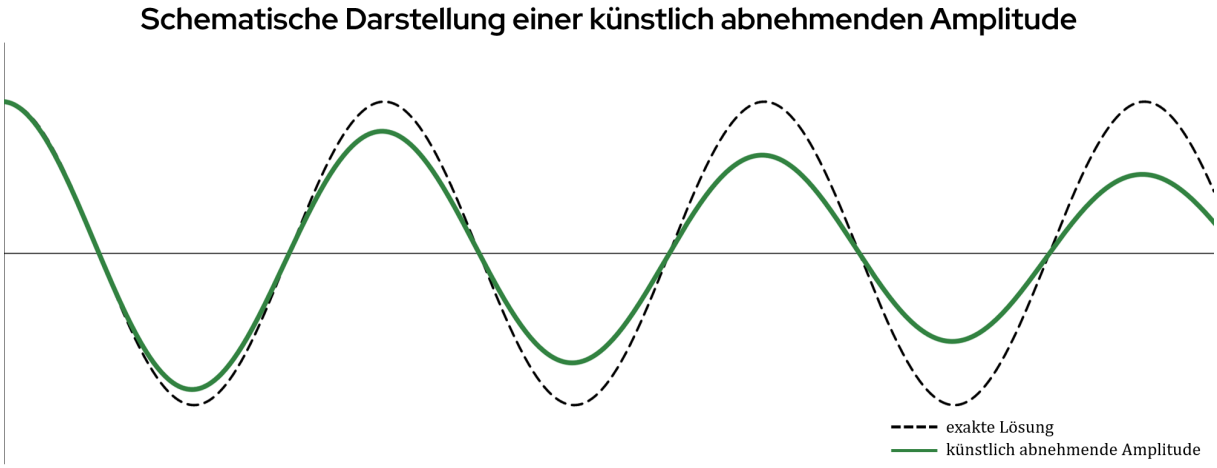


Abbildung 1: Schematische Darstellung einer künstlich abnehmenden Amplitude

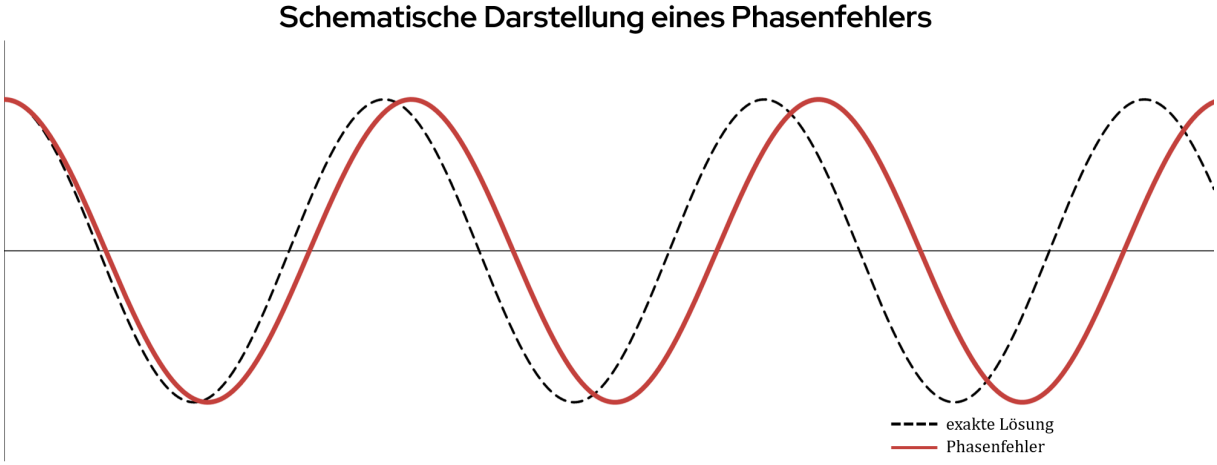


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Phasenfehlers

3.1 Näherung der Position

Zuerst betrachten wir die drei Verfahren, welche auch auf dem Poster verglichen werden, namentlich geht es um das Heun-, Leapfrog- und Runge-Kutta-Verfahren.

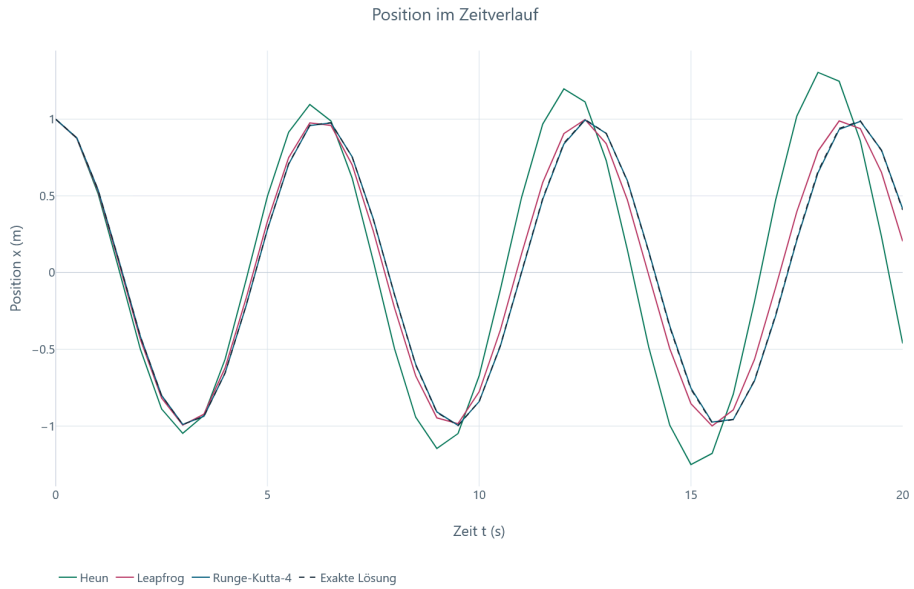


Abbildung 3: Vergleich der Verfahren mit $h = 0.5$ und $\mathrm{N} = 40$

In Abbildung 3 sehen wir die approximierte Position des Federpendels mit den Anfangsbedingungen wie in Abschnitt 2.2 beschrieben für das Zeitintervall von 0 bis 20 Sekunden in $\mathrm{N} = 40$ Schritten von jeweils $h = 0.5$ Sekunden.

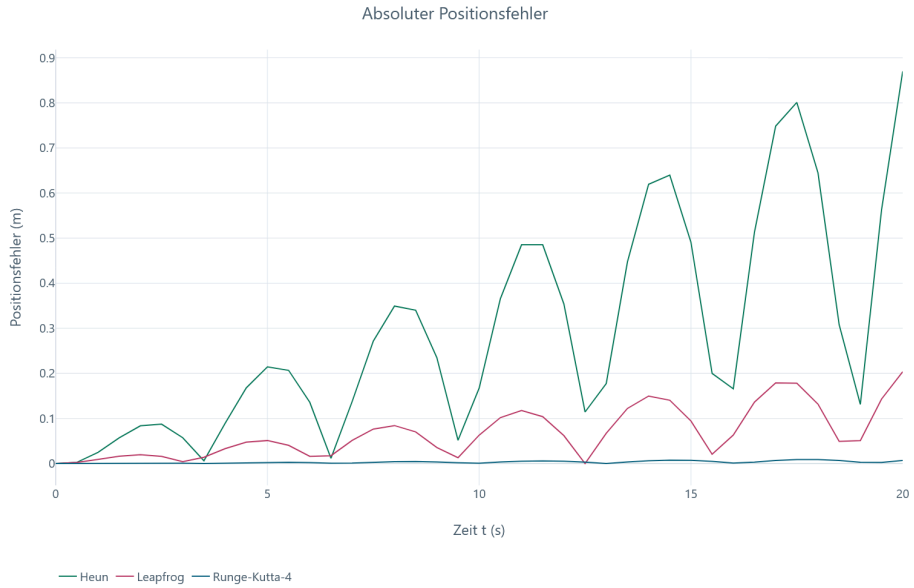


Abbildung 4: Absoluter Positionsfehler der Verfahren mit $h = 0.5$ und $\mathrm{N} = 40$

In Abbildung 4 hingegen ist der Absolute Positionsfehler der Verfahren in Metern auf der Y-Achse dargestellt. Dieser Ergibt sich aus dem Betrag der Differenz der approximierten Position und der tatsächlichen Position mithilfe der analytischen Lösung. Das ermöglich uns exaktere Aussagen über die Genauigkeit der jeweiligen Verfahren zu treffen.

3.1.1 Diagramme

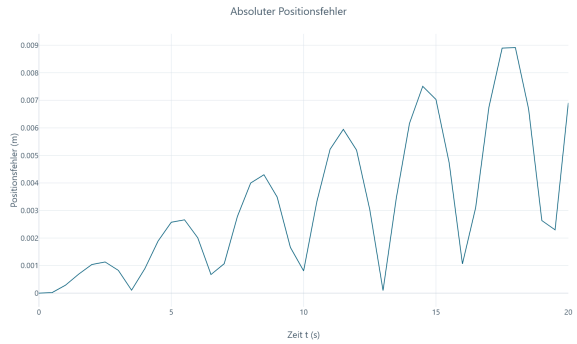


Abbildung 5: Positionsfehler Runge-Kutta-Verfahren $\mathrm{N} = 40$

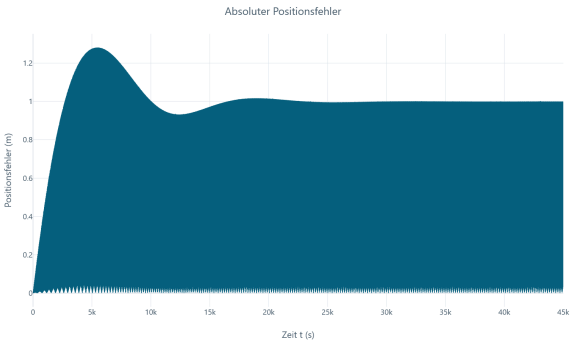


Abbildung 6: Positionsfehler Runge-Kutta-Verfahren $\mathrm{N} = 90000$

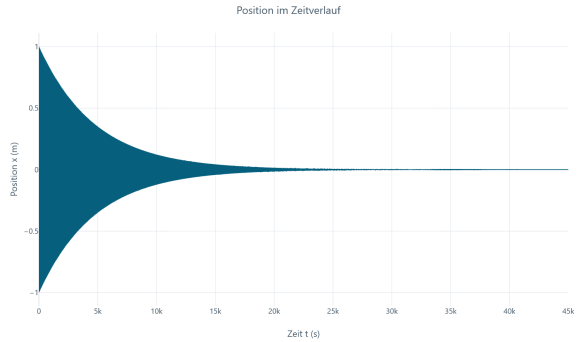


Abbildung 7: Position Runge-Kutta $\mathrm{N} = 90000$

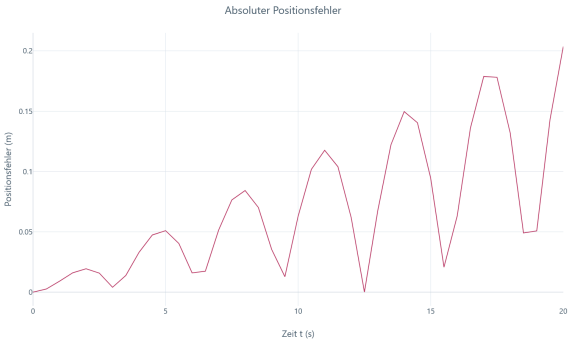


Abbildung 8: Positionsfehler Leapfrog-Verfahren $\mathrm{N} = 40$

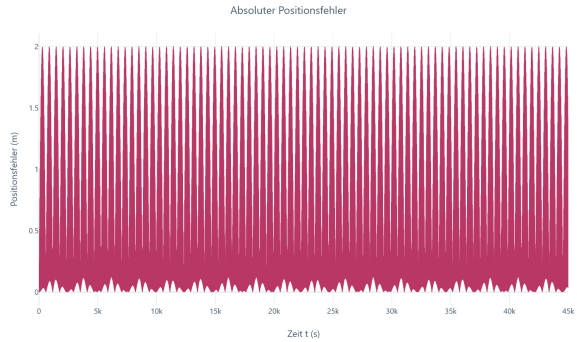


Abbildung 9: Positionsfehler Leapfrog-Verfahren $\mathrm{N} = 90000$

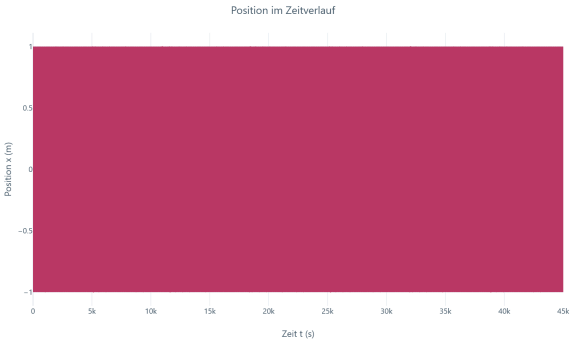


Abbildung 10: Position Leapfrog $\mathrm{N} = 90000$

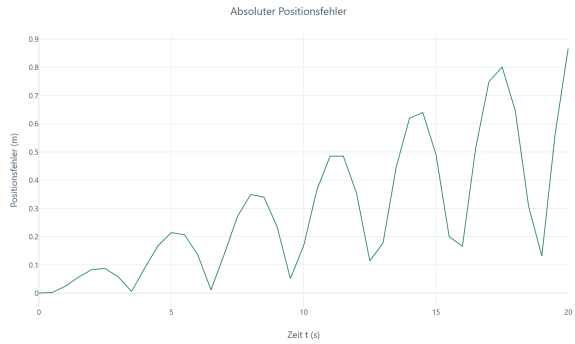


Abbildung 11: Positionsfehler Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 40$

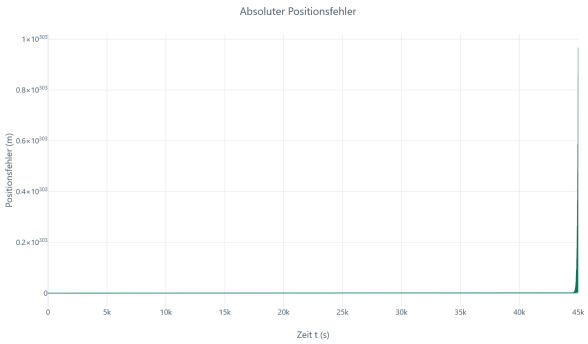


Abbildung 12: Positionsfehler Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 90000$

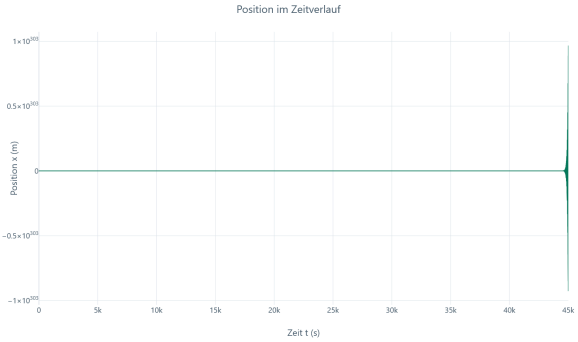


Abbildung 13: Position Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 90000$

3.1.2 Runge-Kutta-Verfahren

Für den betrachteten Zeitraum von 20 Sekunden oder 40 Schritten, fällt auf, dass das Runge-Kutta-Verfahren den kleinsten Absoluten Positionsfehler aufweist. Zunächst sieht es so aus, als würde der Positionsfehler stetig zunehmen, so wie es in Abbildung 5 dargestellt ist. Betrachtet man jedoch einen Zeitraum von mehr als 20 Sekunden, wie in Abbildung 6 gezeigt für einen Zeitraum von 45000 Sekunden mit einer Schrittweite von 0.5 Sekunden pro Schritt, fällt auf, dass der Absolute Positionsfehler zunächst bei 5538.5 Sekunden ein Maximum von etwas über $1.28\mathrm{m}$ erreicht und anschliessend wirder abnimmt. Der absolute Fehler schwankt weiterhin, beträgt danach jedoch noch maximal $1.02\mathrm{m}$ für den beobachteten Zeitraum von 45000 Sekunden (entspricht 12.5 Stunden). Das lässt sich durch die Abbildung 7 erklären, auf welcher die approximierte Position des Pendelkörpers für das Runge-Kutta-Verfahren dargestellt ist. Dort lässt sich eine systematische und künstliche Abnahme der Amplitude (vgl. Abbildung 1) erkennen bist diese nach 45000 Sekunden nur noch wenige Mikrometer beträgt. Da die Amplitude somit praktisch gegen 0 geht ist auch der Positionsfehler beschränkt. Die systematische Abnahme der numerischen Schwingungsamplitude führt zu einem Amplitudenfehler. Gleichzeitig entsteht ein Phasenfehler, durch den sich die numerische Schwingung zunehmend gegenüber der analytischen Lösung verschiebt. Das Zusammenspiel beider Fehlerarten erklärt die Schwankungen des absoluten Positionsfehlers (vgl. Abbildung 2).

3.1.3 Leapfrog Verfahren

Der absolute Positionsfehler des Leapfrog-Verfahrens, wie in Abbildung 8 dargestellt, scheint, gleich wie beim Runge-Kutta-Verfahren, stetig zu wachsen. Nach 40 Schritten à 0.5 Sekunden beträgt der Fehler schon etwas über 0.2 Meter, also deutlich ungenauer als das Runge-Kutta-Verfahren, welches bei gerade einmal 0.009 Metern Positionsfehler in den ersten 40 Schritten liegt. Betrachten wir dafür erneut einen längeren Zeitraum von erneut 90000 Schritten (oder 45000 Sekunden), fällt auf, dass auch der Positionsfehler des Leapfrog-Verfahrens begrenzt ist und zwischen wenigen Millimetern und maximal 2 Metern schwankt. Dies ist in der Abbildung 9 erkennbar. In der Abbildung 10 ist dafür zu erkennen, dass die Approximation der Position beim Leapfrog Verfahren, im Gegensatz zum Runge-Kutta-Verfahren, keine künstlich abnhemende Amplitude aufweist, weshalb der, durch den Phasenfehler entstehende, absolute Positionsfehler grösser ist als beim Runge-Kutta-Verfahren[1].

3.1.4 Heun Verfahren

In Abbildung 11 sehen wir den absoluten Positionsfehler des Heun-Verfahrens für die ersten 40 Schritte. Dabei fällt auf, dass er mit einem Maximum von über $0.8\mathrm{m}$ bereits deutlich grösser ist, als derjenige des Runge-Kutta- und Leapfrog-Verfahrens. Die Zunahme des Positionsfehlers wirkt zunächst ähnlich wie bei den andern Verfahren, wenn wir jedoch die Simulation mit 90000 Schritten durchführen wie in Abbildung 12 dargestellt, fällt auf, dass der Fehler weiter ansteigt und in den letzten tausend Schritten einen höchstwert von über $0.8 \cdot 10^{303}$ Metern aufweist. Betrachten wir die Abbildung 13 fällt auf, dass das Heun-Verfahren ein gegensätzliches Verhalten zum Runge-Kutta-Verfahren aufweist. Die Amplitude der Schwingung nimmt dabei künstlich zu was kontinuierlich geschieht und zu einem immer grösseren Positionsfehler führt. Gegen Ende nimmt die Amplitude sehr stark zu, weshalb die vorher bereits enormen Fehler kaum sichtbar sind.

[1] Da die Amplitude des Runge-Kutta-Verfahrens gegen null geht ist der max. Positionsfehler die höhe der Amplitude. Beim Leapfrog-Verfahren, kann es dagegen sein, dass durch den Phasenfehler die Amplituden verschoben werden und somit beträgt der maximale Positionsfehler das doppelte der höhe der Amplitude. Dies gilt nur für den längerfristigen Grenzfall und insbesondere nicht für die anfänglichen Approximationen.

3.2 Energie

Da es sich bei unserem Beispiel um ein reibungsfreies Federpendel handelt muss die Gesamtenergie, welche die Summe aus der kinetischen Energie des Pendelkörpers und der elastischen Energie der Feder ist, konstant bleiben, da kein Energieverlust durch die Abgabe von Energie stattfindet. Dies wird durch die Energieformel verdeutlicht, welche für die Gesamtenergie wie folgt lautet:

$$E = \frac{D \cdot x_0^2}{2} \tag{3.1}$$

Die Gesamtenergie hängt somit nur von der Federkonstante D und der anfänglichen Auslenkung x_0 ab und bleibt somit konstant, weshalb besonders die langfristige Entwicklung der Approximation spannend ist. Ein geeignetes Verfahren approximiert die Energie möglichst exakt und so, dass es längerfristig zu keinen systematischen Fehlern, wie künstlichen Zu- oder Abnahmen der Energie kommt. Zur Approximation der Energie verwenden wir die folgende Formel:

$$E_i = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_i^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 \tag{3.2}$$

Auf der Abbildung 14 sehen wir den absoluten Energiefehler (in Joule; auf der Y-Achse) im Zeitintervall von 0 bis 20 Sekunden in 40 Schritten à 0.5 Sekunden approximiert.

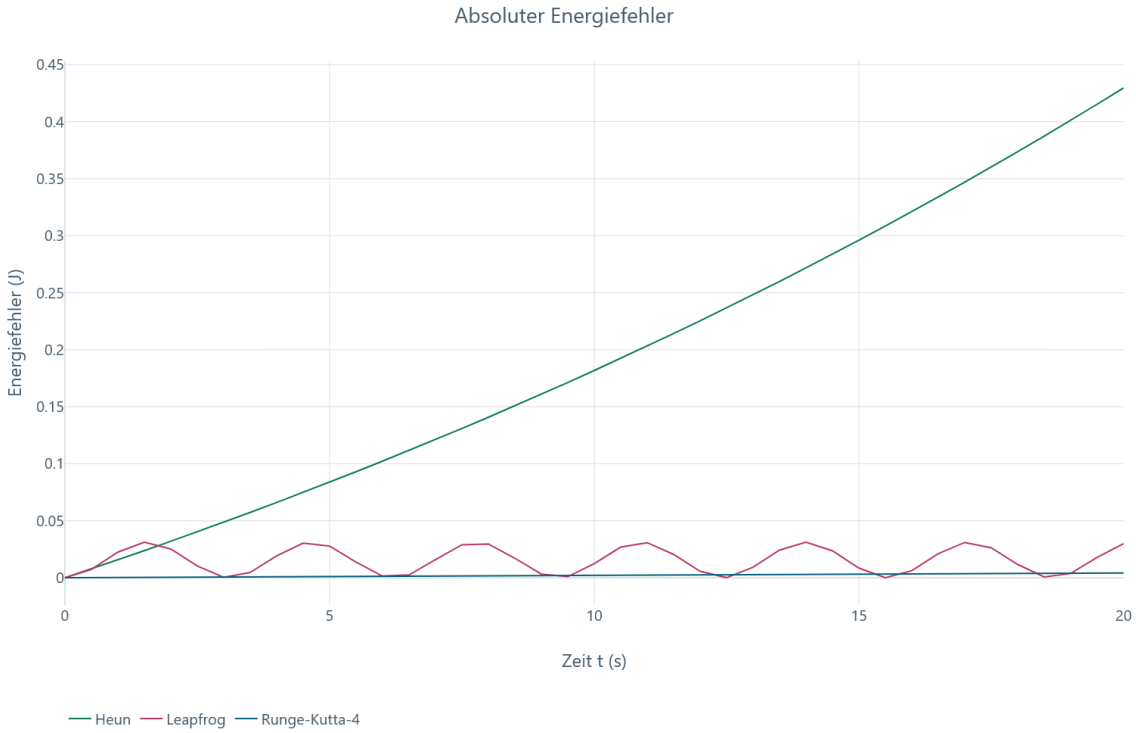


Abbildung 14: Vergleich der Verfahren - absoluter Energiefehler

3.2.1 Diagramme



Abbildung 15: Gesamtenergie Runge-Kutta-Verfahren $\mathrm{N} = 20$

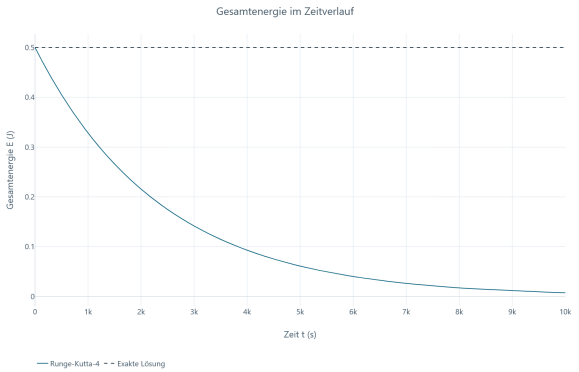


Abbildung 16: Gesamtenergie Runge-Kutta-Verfahren $\mathrm{N} = 20000$

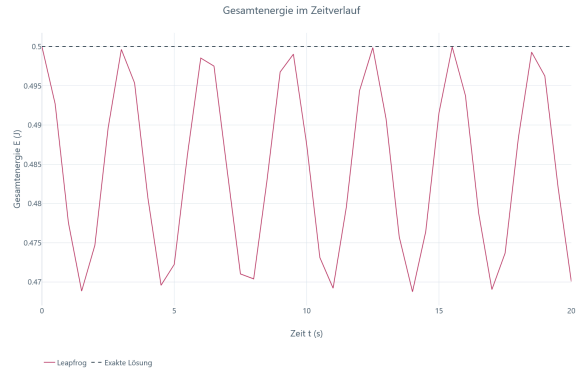


Abbildung 17: Gesamtenergie Leapfrog-Verfahren $\mathrm{N} = 20$

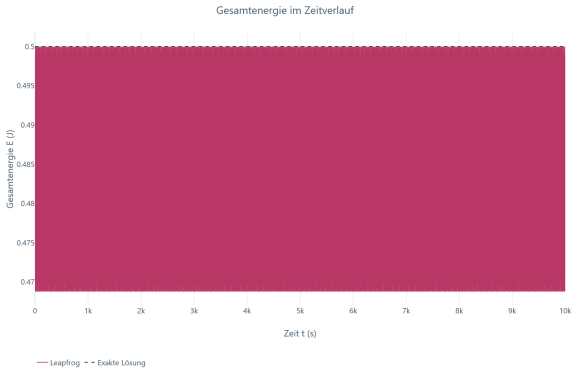


Abbildung 18: Gesamtenergie Leapfrog-Verfahren $\mathrm{N} = 20000$



Abbildung 19: Gesamtenergie Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 20$

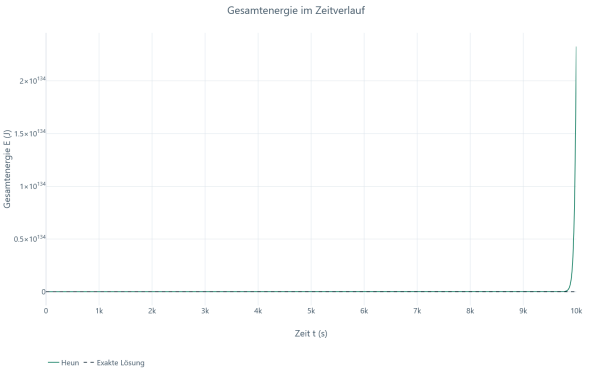


Abbildung 20: Gesamtenergie Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 20000$

3.2.2 Runge-Kutta-Verfahren

Betrachten wir zuerst die Approximation der Gesamtenergie des Runge-Kutta-Verfahrens wie auf der Abbildung 15 dargestellt. Auffallend ist, dass die Energie stetig und, in dem betrachteten Zeitraum, linear abzunehmen scheint. Die Abnahme des Gesamtenergie scheint ähnlich zu sein, wie der maximale Positionsfehler in diesem Zeitraum (vergleiche Abbildung 5). Betrachten wir die Gesamtenergie in einem grösseren Zeitraum von 20000 Schritten, so fällt auf, dass die Energie stark abnimmt und gegen Null zu gehen scheint. Dies lässt sich durch die Abbildung 7 erklären, auf welcher wir gesehen haben, dass die Ampli-

tude mit dem Runge-Kutta-Verfahren künstlich abnimmt. Dies erklärt auch die Abnahme der Energie.

3.2.3 Leapfrog-Verfahren[2]

Betrachten wir das Leapfrog Verfahren fällt auf, dass die angenäherte Gesamtenergie konstant um den tatsächlichen Wert schwankt und das sowohl für kleiner Zeitintervalle wie in Abbildung 17 als auch für längerfristige Näherungen von 20000 Schritten in Abbildung 18 oder bis zu 90000 Schritten[3]. Dies lässt sich auch dadurch erklären, dass das Leapfrog-Verfahren, wie in Abschnitt 3.1.3 besprochen, vor allem einen Phasenfehler und keine systematisch ab- oder zuhnemende Amplitude aufweist, weshalb die Energie beinahe konstant bleibt und für 20000 Schritte um höchstens $0.03\ \mathrm{J}$ von den tatsächlichen $0.5\ \mathrm{J}$ abweicht. Anfänglich ist das Leapfrog-Verfahren zwar ungenauer, als das Runge-Kutta-Verfahren, doch nach etwas mehr als 300 Schritten, führt die systematische Amplituden- und damit Energieabnhame des Runge-Kutta Verfahrens zu einem immer grösseren Energiefehler, weshalb das Leapfrog-Verfahren besonders für längerfristige Näherungen der Gesamtenergie am exaktesten ist.

3.2.4 Heun-Verfahren

Beim Heun Verfahren sehen wir eine stetig zunehmende Gesamtenergie. Bereits nach 40 Schritten, wie in Abbildung 19 dargestellt beträgt die Approximation beinahe $1\ \mathrm{J}$ und hat sich somit fast verdoppelt. Für längere Zeitintervalle von 20000 Schritten, wie in Abbildung 20, dass die Energie gegen Ende hin rasant zunimmt, dass lässt sich mit der künstlich zunehmenden Amplitude erklären, welche bereits in Abschnitt 3.1.4 betrachtet wurde.

4 Diskussion

Die in Abschnitt 3.1 und Abschnitt 3.2 besprochenen Resultate haben einen Einblick in die verschiedenen Näherungsverfahren (Runge-Kutta-, Heun- & Leapfrog-Verfahren) gegeben. Auffällig dabei ist, dass die Verfahren in verschiedenen Bereichen unterschiedlich geeignet sind. Während das Heun- (und Euler-) Verfahren sehr einfach zu implementieren sind, führen sie sehr schnell zu systematischen Fehlern wie einer künstlichen Amplituden- & Energiezunahme. Das Leapfrog- (und Euler-Cromer-) Verfahren eigenen sich dafür besonders für längerfristige Näherungen, da sie keinen systematischen zu- oder abnehmdenen Amplituden oder Energiefehler aufweisen. Das Runge-Kutta-Verfahren ist komplexer, als die andern Verfahren eignet sich jedoch besonders für Näherungen, welche sehr präzise sein sollen, jedoch nur über kürzere Zeiträume, da sich sehr geringe systematische Fehler akkumulieren. Die Wahl des Verfahrens hängt somit stark von den Ansprüchen an die Näherung sowie die Art der Näherung.

[2] *Hinweis: Für die Approximation der Energie wurde die Velocity-Verlet Form verwendet, damit die Geschwindigkeit und Position zu denselben Zeitpunkten vorliegen.*

[3] Quelle: Simulation auf simplemath.ch

Bibliografie

[1] DMK | Deutschschweizerische Mathematikkomission, *Analysis*, 2. überarbeitete Auflage. hep Verlag.

[2] LEIFIphysik, „Federpendel“. [Online]. Verfügbar unter: https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/grundwissen/federpendel

[3] Wikipedia, „Euler method“. [Online]. Verfügbar unter: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method

[4] Wikipedia, „Semi-implicit Euler method“. [Online]. Verfügbar unter: https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-implicit_Euler_method

[5] Wikipedia, „Heun's method“. [Online]. Verfügbar unter: https://en.wikipedia.org/wiki/Heun%27s_method

[6] Wikipedia, „Leapfrog integration“. [Online]. Verfügbar unter: https://en.wikipedia.org/wiki/Leapfrog_integration

[7] Wikipedia, „The fourth-order Runge–Kutta method“. [Online]. Verfügbar unter: https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods#The_fourth-order_Runge%E2%80%93Kutta_method

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Schematische Darstellung einer künstlich abnehmenden Amplitude 7
Abbildung 2 Schematische Darstellung eines Phasenfehlers 7
Abbildung 3 Vergleich der Verfahren mit $h = 0.5$ und $\mathrm{N} = 40$ 8
Abbildung 4 Absoluter Positionsfehler der Verfahren mit $h = 0.5$ und $\mathrm{N} = 40$ 8
Abbildung 5 Positionsfehler Runge-Kutta-Verfahren $\mathrm{N} = 40$ 9
Abbildung 6 Positionsfehler Runge-Kutta-Verfahren $\mathrm{N} = 90000$ 9
Abbildung 7 Position Runge-Kutta $\mathrm{N} = 90000$ 9
Abbildung 8 Positionsfehler Leapfrog-Verfahren $\mathrm{N} = 40$ 9
Abbildung 9 Positionsfehler Leapfrog-Verfahren $\mathrm{N} = 90000$ 9
Abbildung 10 Position Leapfrog $\mathrm{N} = 90000$ 9
Abbildung 11 Positionsfehler Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 40$ 10
Abbildung 12 Positionsfehler Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 90000$ 10
Abbildung 13 Position Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 90000$ 10
Abbildung 14 Vergleich der Verfahren - absoluter Energiefehler 12
Abbildung 15 Gesamtenergie Runge-Kutta-Verfahren $\mathrm{N} = 20$ 13
Abbildung 16 Gesamtenergie Runge-Kutta-Verfahren $\mathrm{N} = 20000$ 13
Abbildung 17 Gesamtenergie Leapfrog-Verfahren $\mathrm{N} = 20$ 13
Abbildung 18 Gesamtenergie Leapfrog-Verfahren $\mathrm{N} = 20000$ 13
Abbildung 19 Gesamtenergie Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 20$ 13
Abbildung 20 Gesamtenergie Heun-Verfahren $\mathrm{N} = 20000$ 13