Gekoppelte Differentialgleichungen

Physik & Mathematik

Manuel Bürki und Stepan Khristolyubov

Kantonsschule Zug

Einleitung

Die Ordnung einer Differentialgleichung wird durch die höchste vorkommende Ableitung bestimmt. Zur numerischen Approximation schreiben wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung des Federpendels in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um. Dieses approximieren wir mit dem Runge-Kutta-, Leapfrog- und Heun-Verfahren.

Einstiegsbeispiel

Wir betrachten ein horizontales, reibungsfreies Federpendel (siehe Abbildung 1) mit Masse m und Federkonstante D. Aus dem Hookeschen Gesetz $F_F = -D \cdot x$ und dem zweiten Newtonschen Axiom $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$ folgt:

$$F_F = -D \cdot x = m\ddot{x} \Longrightarrow \ddot{x} = -\frac{D}{m} \cdot x \implies \ddot{x}(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t) \tag{1}$$

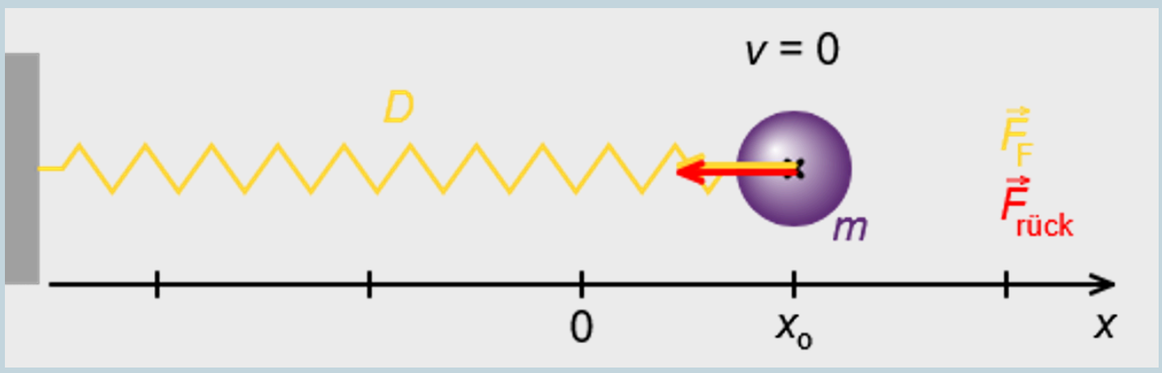


Abbildung 1: Federpendel auf die Position x_0 ausgelenkt

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die Beschleunigung $\ddot{x}$ in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt, soll jetzt in ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen umgeformt werden. Dazu wird eine Variable v definiert, welche die Geschwindigkeit und somit die erste Ableitung der Position x ist, es gilt: $v(t) := \dot{x}(t)$. Schreiben wir die Gleichung mit $\dot{v}$ anstelle von $\ddot{x}$ erhalten wir das folgende System von gekoppelten Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{-D}{m} \cdot x(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Differentialgleichungen sind gekoppelt, da $\dot{x}$ von v abhängt und $\dot{v}$ von x. Für die Approximation wählen wir die Parameter D und m, die Anfangsbedingungen x_0 und v_0, die Schrittweite h sowie die Anzahl der Schritte N:

$D = 1\ \mathrm{Nm^{-1}}, m = 1\mathrm{kg}, x_0 = 1\mathrm{m}, v_0 = 0\ \mathrm{ms^{-1}}, a_0 = -1\ \mathrm{ms^{-2}}, h = 0.5\mathrm{s}, \mathrm{N} = 40$

klassisches Runge-Kutta-Verfahren (RK4)

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren (4. Ordnung) zeichnet sich dadurch aus, dass für einen Zeitschritt h 4 Näherungen für die jeweilige Ableitung (= Änderungsrate) gemacht werden und ein gewichteter Mittelwert genutzt wird, wodurch eine hohe Genauigkeit erreicht wird.

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6} \cdot (k_1^x + 2k_2^x + 2k_3^x + k_4^x) \\ v_{i+1} &= v_i + \frac{h}{6} \cdot (k_1^v + 2k_2^v + 2k_3^v + k_4^v) \\ &\text{für i} = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \text{ mit} \\ k_1^x &= v_i,\ k_2^x = v_i + \frac{h}{2} \cdot k_1^v,\ k_3^x = v_i + \frac{h}{2} \cdot k_2^v,\ k_4^x = v_i + h \cdot k_3^v \\ k_1^v &= a(x_i),\ k_2^v = a\left(x_i + \frac{h}{2}k_1^x\right),\ k_3^v = a\left(x_i + \frac{h}{2}k_2^x\right),\ k_4^v = a(x_i + h \cdot k_3^x) \end{aligned} \tag{3}$$

Leapfrog-Verfahren

Das Leapfrog-Verfahren approximiert die Position und die Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten, weshalb es sich besonders zur Approximation von schwingenden und anderen mechanischen System eignet.

$$\begin{aligned} v_{-\frac{1}{2}} &= v_0 - \frac{h}{2} \cdot a_0 \\ v_{i+\frac{1}{2}} &= v_{i-\frac{1}{2}} + a_i \cdot h \\ x_{i+1} &= x_i + v_{i+\frac{1}{2}} \cdot h \\ a_{i+1} &= a(x_{i+1}) = -\frac{D}{m} \cdot x_{i+1} \end{aligned} \tag{4}$$

Heun-Verfahren

Das Heun-Verfahren berechnet zuerst mit dem Euler-Verfahren eine Näherung für den nächsten Zeitschritt. Dann wird durch Mittelung der Änderungsraten am Anfang und am vorhergesagten Ende eine genauere Näherung bestimmt.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1} = x_i + h \cdot v_i,\ \tilde{v}_{i+1} &= v_i + h \cdot a_i,\ \tilde{a}_{i+1} = -\frac{D}{m} \cdot \tilde{x}_{i+1} \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} \cdot (v_i + \tilde{v}_{i+1}) \\ v_{i+1} &= v_i + \frac{h}{2} \cdot (a_i + \tilde{a}_{i+1}) \\ a_{i+1} &= -\frac{D}{m} \cdot x_{i+1} \end{aligned} \tag{5}$$

Vergleich der Verfahren

In der folgenden Grafik sehen wir die Approximation der Position $x(t)$ mit dem Runge-Kutta-, dem Heun- und dem Leapfrog-Verfahren. Diese können wir mit der exakten analytischen Lösung vergleichen.

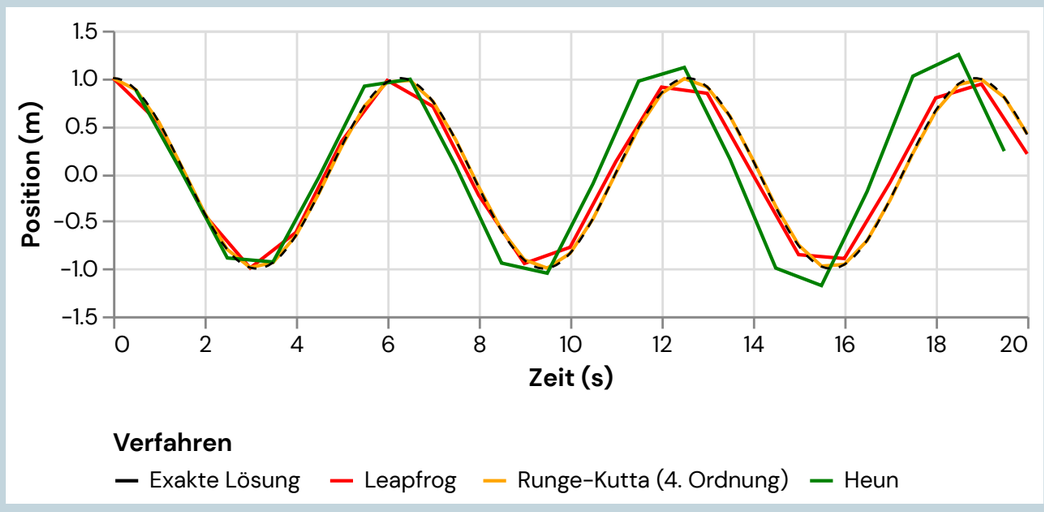


Abbildung 2: Vergleich der Verfahren $\mathrm{N} = 40, h = 0.5s$

Resultate

Zum Vergleich der Verfahren berechnen wir die analytische Lösung der Position $x(t)$ und erhalten für unsere Startwerte:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Longrightarrow x(t) = 1\mathrm{m} \cdot \cos(t \cdot 1\mathrm{s}^{-1}) \tag{6}$$

Wir sehen in Abbildung 2, dass die Position durch das RK4-Verfahren am genauesten approximiert wird. Das Heun-Verfahren ist anfangs ebenfalls ziemlich exakt. Weitere Simulationen zeigen jedoch, dass der Positionsfehler unbeschränkt wächst. Dies wird besonders für $\mathrm{N} \geq 10^3$ sichtbar. Das Leapfrog-Verfahren verhält sich zu Beginn ähnlich wie das Heun-Verfahren, für grosse N bleibt der Positionsfehler des Leapfrogs- und RK4-Verfahrens jedoch beschränkt, während das Heun-Verfahren immer ungenauer wird. Das lässt sich dadurch erklären, dass es sich beim Leapfrog-Verfahren vor allem um einen Phasenfehler handelt, während das Heun-Verfahren eine künstlich zu- und das RK4-Verfahren eine abnehmende Schwingungsamplitude aufweist.

Daten basieren auf weiteren Simulationen · Quelle: simplemath.ch

Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass die Wahl des Verfahrens von der gewünschten Genauigkeit abhängt. Das RK4-Verfahren ist für den gewählten Zeitraum am exaktesten, benötigt aber vier Näherungen pro Schritt. Das Heun-Verfahren ist weniger aufwendig, führt jedoch schnell zu einer künstlichen Zunahme der Schwingungsamplitude. Das Leapfrog-Verfahren hat, gleich wie RK4, einen beschränkten Amplitudenfehler sowie einen Phasenfehler. Es eignet sich dafür besonders gut zur Berechnung der Energie. Im Gegensatz zum RK4- und Heun-Verfahren bleibt der Energiefehler beim betrachteten Federpendel längerfristig beschränkt ohne systematische Zu- oder Abnahme. Das RK4-Verfahren eignet sich somit besonders für die präzise Näherung der Position und Energie über begrenzte Zeiträume, während das Leapfrog-Verfahren besonders für längerfristige Simulationen mechanischer Systeme geeignet ist.

Simulationen, Quellen & Weiteres

Finde **interaktive Simulationen**, mathematische **Grundlagen**, **weiterführende Inhalte** und dieses Poster als PDF auf der Projektseite. Gehe auf simplemath.ch oder scanne den QR-Code.